SEMESTRAL

UNI

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

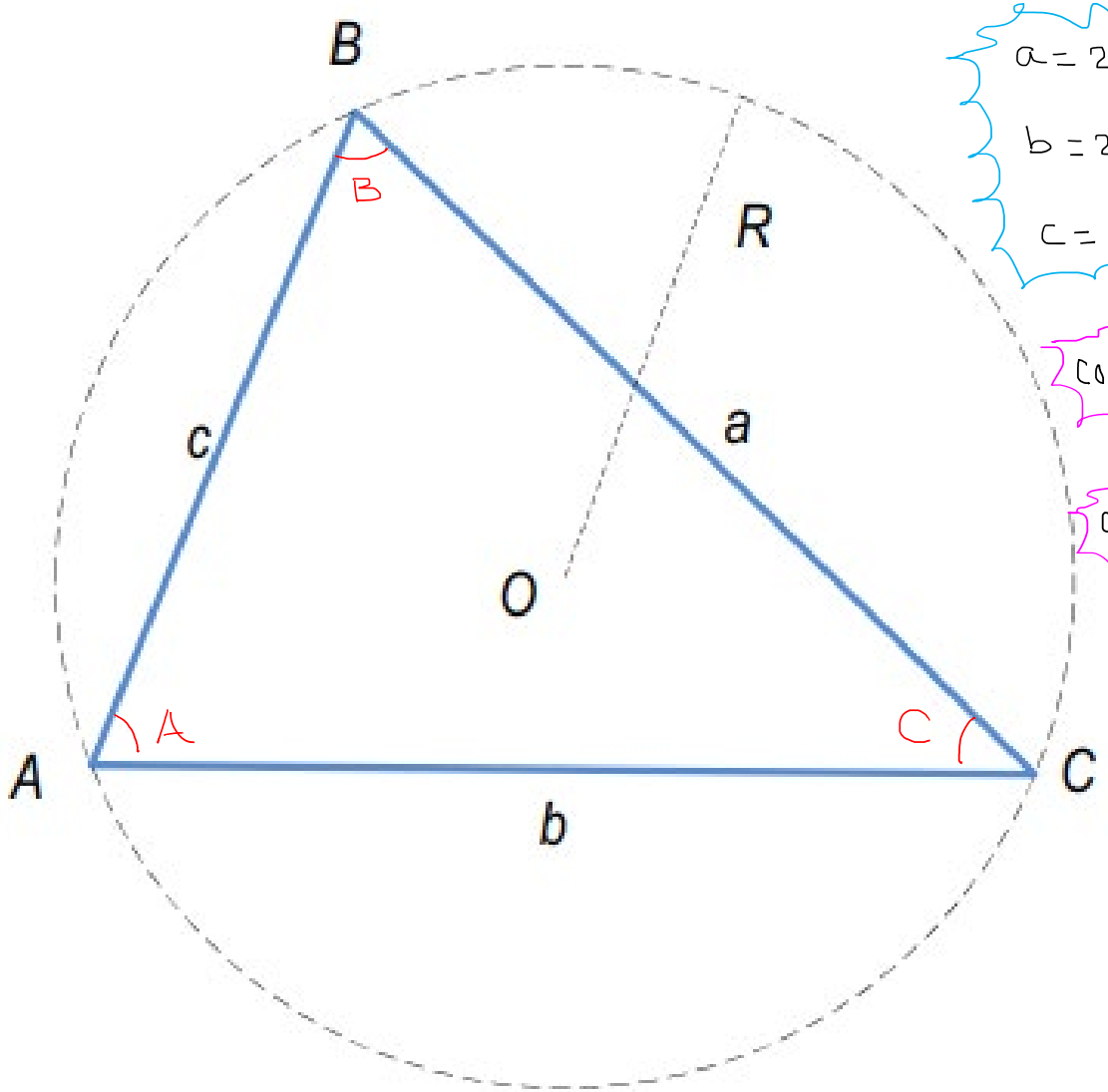
TRIGONOMETRÍA

Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos

Semana: 19

Resolución de triángulos

Sea un triangulo ABC de lados a,b y c, cuyo circunradio es R



$a = 2R\,Sen A$

$b = 2R\,Sen B$

$c = 2R\,Sen C$

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

Se cumple

Teorema de senos

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{C}{senC} = 2R$$

Teorema de cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcosC$$

Teorema de proyección

$$a = bcosC + ccosB$$
$$b = acosC + ccosA$$
$$c = acosB + bcosA$$

Problema UNI 2018

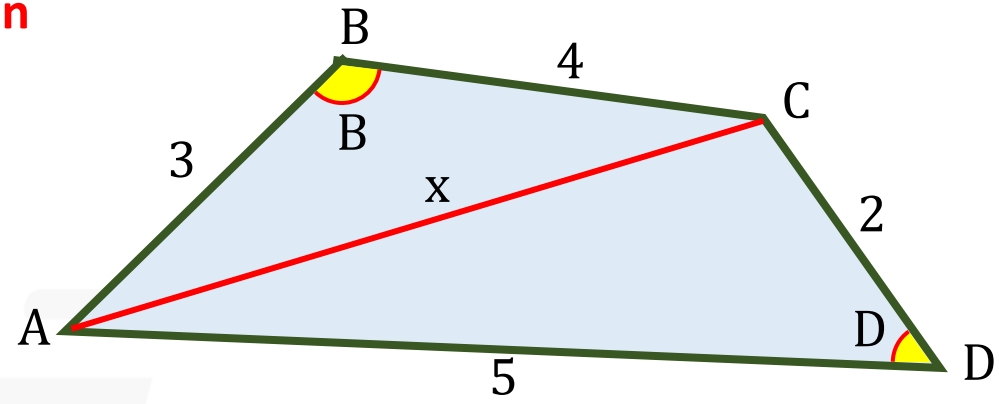
Sea ABCD un cuadrilátero con AB = 3 cm, BC = 4 cm CD = 2 cm y AD = 5 cm.

Calcule el valor de $E = \dfrac{1 + 6\cos B}{5\cos D}$

A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2

D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Resolución



Por teorema de cosenos

$\triangle ABC: x^2 = 3^2 + 4^2 - 2(3)(4)\cos B$

$\triangle ACD: x^2 = 5^2 + 2^2 - 2(5)(2)\cos D$

Igualando

$$25 - 24\cos B = 29 - 20\cos D$$

$$20\cos D = 24\cos B + 4$$

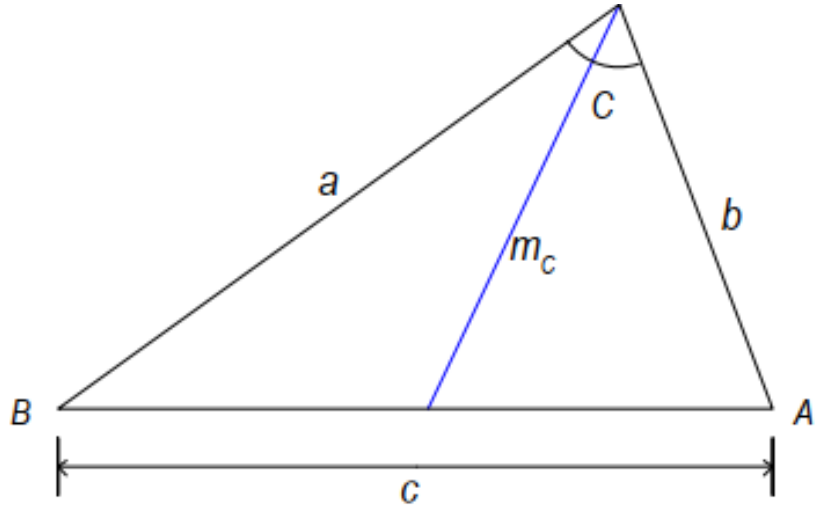
$$20\cos D = 4(1 + 6\cos B)$$

$$\rightarrow 1 = \frac{1 + 6\cos B}{5\cos D}$$

$\therefore E = 1$

Teorema de la mediana

En todo triángulo ΔABC , de lados a, b y c y mediana relativa m_c se cumple



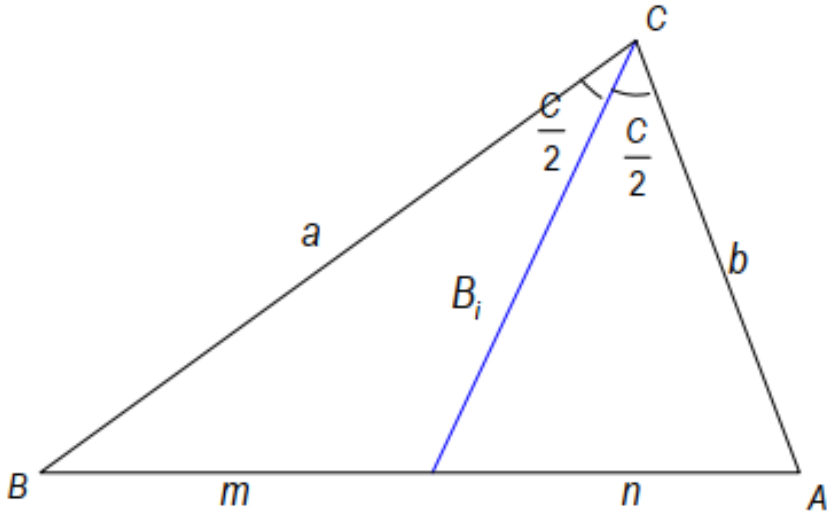
Se cumple

$$4(m_c)^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$$

$$a^2 + b^2 = 2(m_c)^2 + \frac{c^2}{2}$$

Teorema de la Bisectriz

En todo triángulo ΔABC , de lados a, b y c se cumple



Se cumple

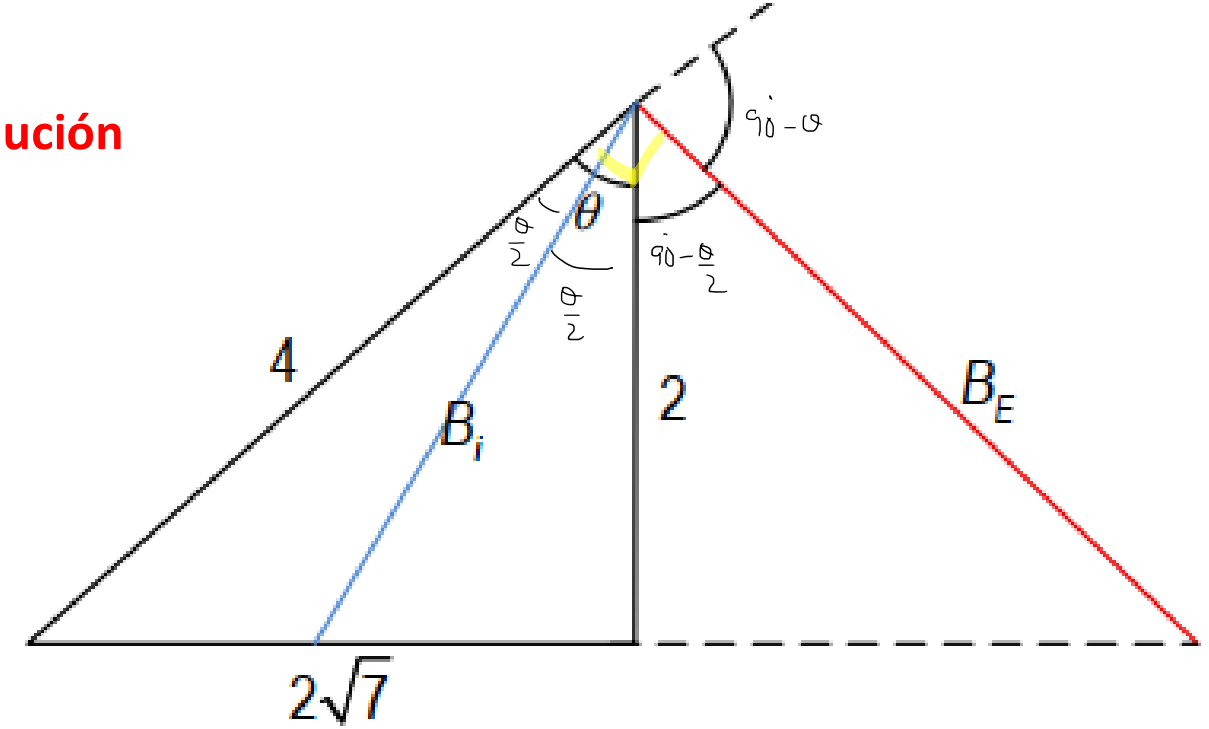
$$B_i = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}$$

$$(B_i)^2 = ab - mn$$

Problema

1. En un triángulo de lados $4, 2$ y $2\sqrt{7}$ determine las longitudes de las bisectrices relativas al mayor ángulo.

Resolución



De la figura : Aplicamos el teorema de cosenos

$$(2\sqrt{7})^2 = 2^2 + 4^2 - 2(2)(4)cos\theta$$

$$cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 120°$$

Aplicamos el teorema de la bisectriz interior

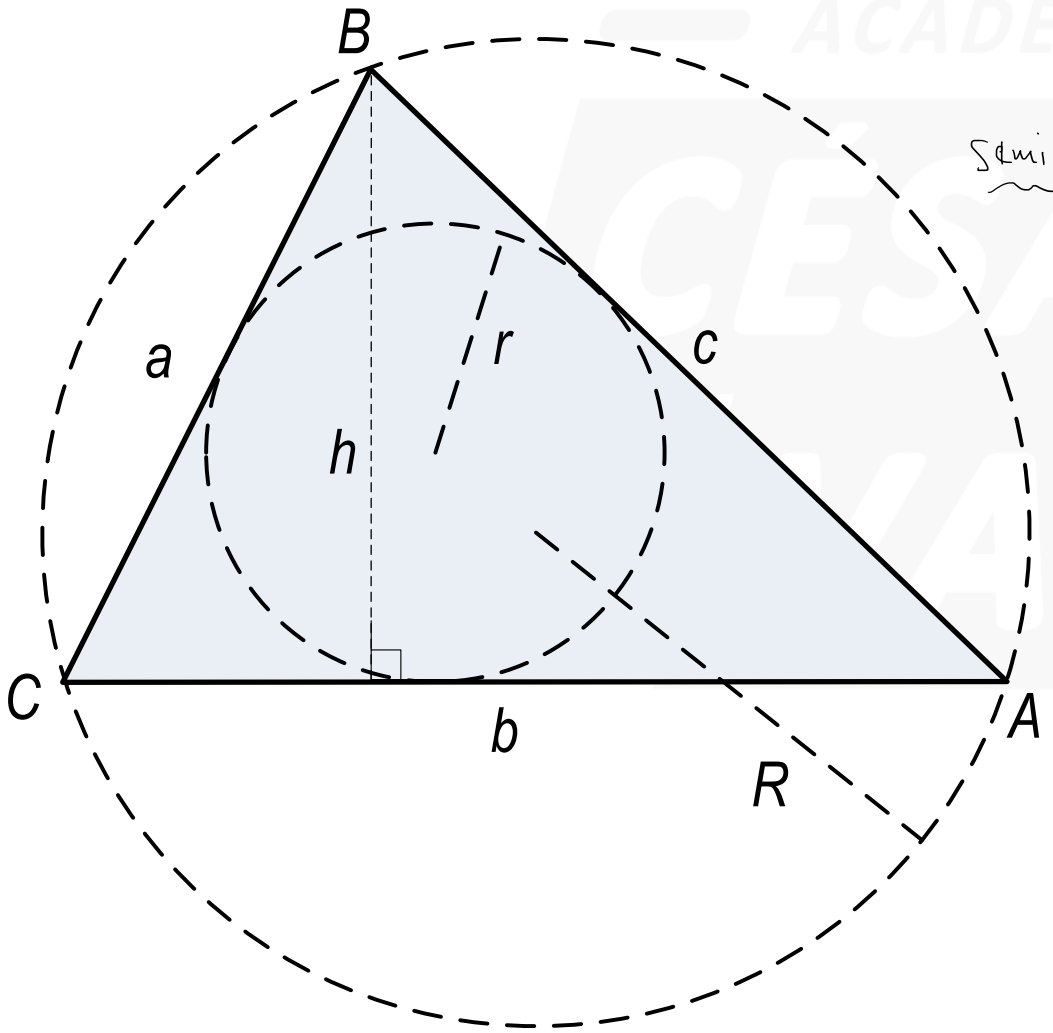
$$B_i = \frac{2ab}{a+b}cos(\frac{\theta}{2})$$

$$B_i = \frac{2(4)(2)}{4+2}cos(\frac{120°}{2})$$

$$B_i = \frac{4}{3}$$

Área de una región triangular

En un triángulo ΔABC, de lados a, b y c, el área "S" de la región triangular se determina:



Semiperímetro

$p = \frac{a+b+c}{2}$

$$S = \frac{1}{2} b.h$$

$$S = \frac{1}{2} a.b.senC$$

$$S = 2R^2 senAsenBsenC$$

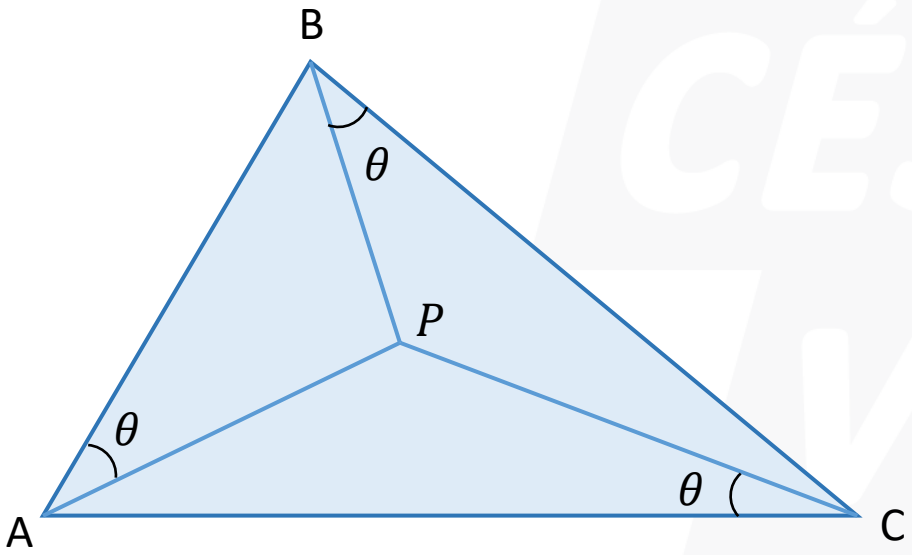
$$S = p.r$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

PUNTO DE BROCARD:

En geometría, el *Punto de Brocard* es un punto especial dentro de un triángulo. Toma su nombre por el matemático francés Henri Brocard (1845 – 1922).

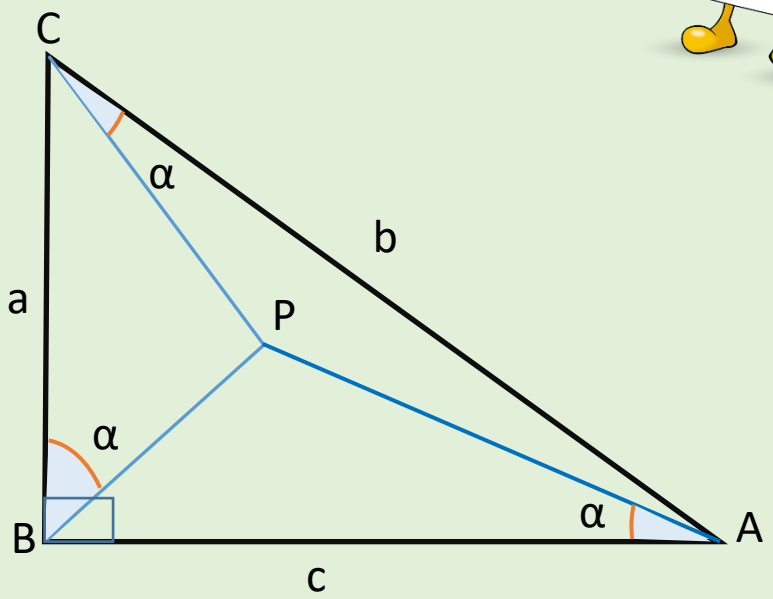


En todo triángulo ABC, se cumple que :

$$\cot\theta = \cot A + \cot B + \cot C$$

P: *punto de Brocard*

Caso particular



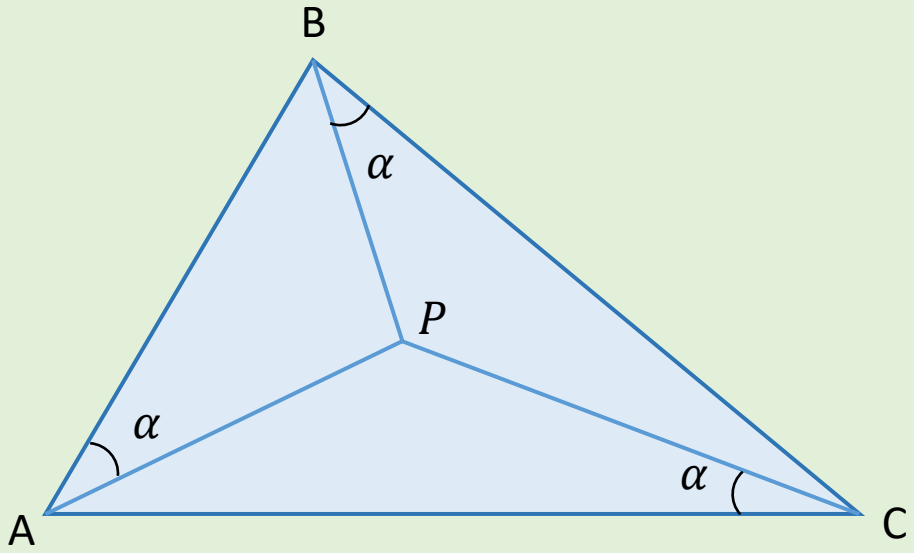
$$\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$$

$$\cot\alpha = \cot A + \cot 90° + \cot C$$

$$\therefore \cot\alpha = \cot A + \cot C$$

EX – UNI 2013 – II

En la figura, calcule $m+n$.



Si $a=3, b=25, c=26, \tan\alpha=\frac{m}{n}$,

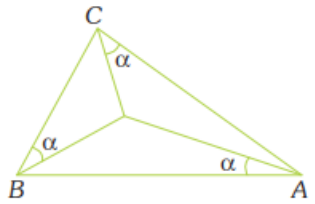
donde m y n son primos entre sí,

A) 727 B) 728 C) 729

D) 730 E) 731

Resolución

Tema: Resolución de triángulos oblicuángulos

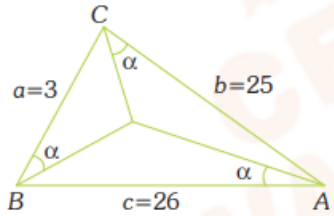


Punto de Brocard:

$$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$$

Análisis y procedimiento

Tenemos



Por teorema de cosenos

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \quad (I)$$

Por área de la región triangular ABC ($\mathbb{S}$)

$$\mathbb{S}=\frac{bc}{2}\operatorname{sen}A$$

$$\rightarrow \operatorname{sen}A=\frac{2\mathbb{S}}{bc} \quad (II)$$

Dividimos (I) y (II)

$$\cot A=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\mathbb{S}}$$

Análogamente

$$\cot B=\frac{a^2+c^2-b^2}{4\mathbb{S}},\ \cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\mathbb{S}}$$

Aplicamos en el gráfico el punto de Brocard

$$\cot\alpha=\cot A+\cot B+\cot C$$

$$\cot\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{4\mathbb{S}}+\frac{a^2+c^2-b^2}{4\mathbb{S}}+\frac{a^2+b^2-c^2}{4\mathbb{S}}$$

$$\cot\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\mathbb{S}}$$

$$\cot\alpha=\frac{(3)^2+(25)^2+(26)^2}{4\mathbb{S}} \quad (III)$$

Aplicamos la fórmula de Herón para calcular el área de la región triangular ABC

$$\mathbb{S}=\sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$\mathbb{S}=\sqrt{27(27-3)(27-25)(27-26)}$$

$$\mathbb{S}=36 \quad (IV)$$

Reemplazamos (IV) en (III)

$$\cot\alpha=\frac{1310}{4(36)}$$

$$\cot\alpha=\frac{655}{72}$$

$$\tan\alpha=\frac{72}{655}$$

$$\frac{m}{n}=\frac{72}{655}$$

Como m y n son primos entre sí entonces $m=72$ y $n=655$.

$\therefore\ m+n=727$

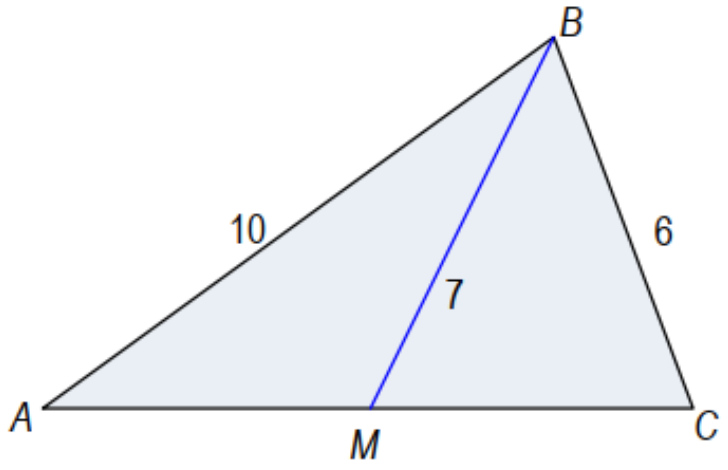
Respuesta

727

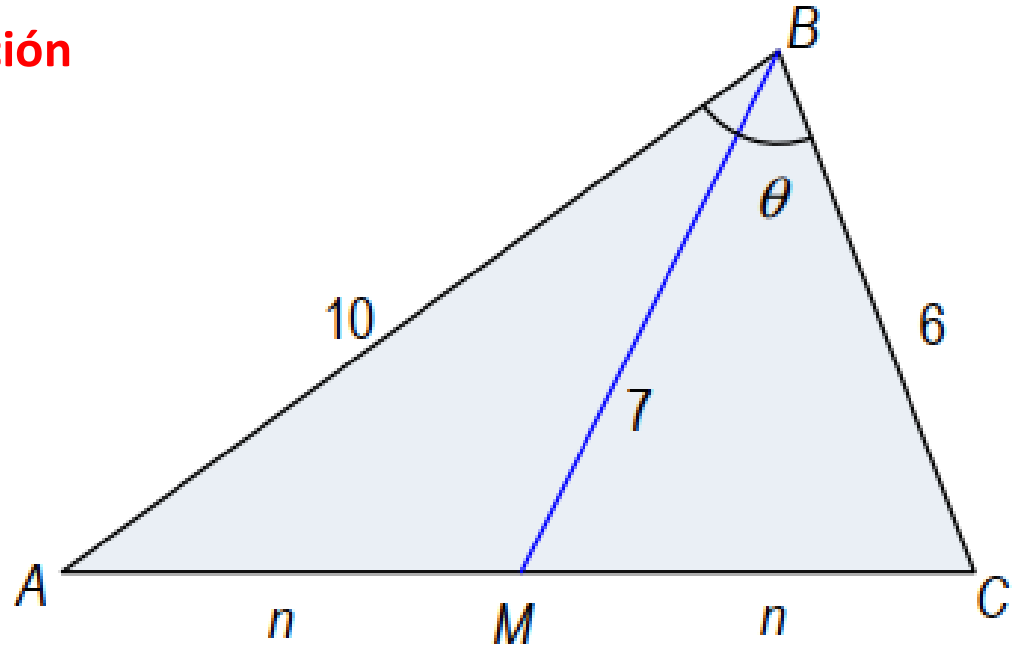
ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

Problema

9. En la figura, si $AM = MC$, determine el área de la región triangular ABC



Resolución



Aplicamos el teorema de la mediana

$$4(7)^2 = 10^2 + 6^2 + 2(10)(6)cos\theta$$

$$\Rightarrow cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 60°$$

Calculamos el área de la región ABC

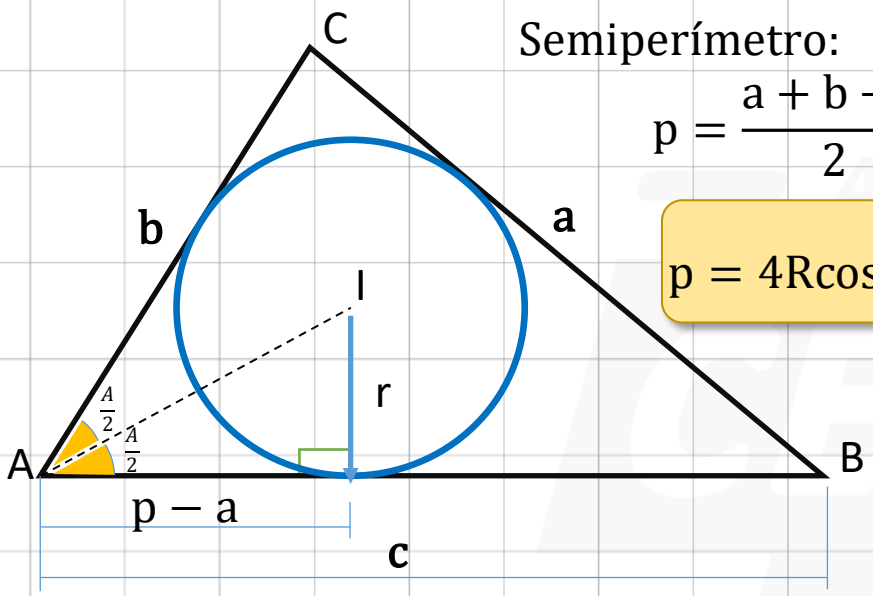
$$A = \frac{1}{2}absen\theta$$

$$A = \frac{1}{2}(10)(6)sen60°$$

Entonces

$$A = 15\sqrt{3}$$

CÁLCULO DEL INRADIO (r):



Semiperímetro:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$p = 4R\cos\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)$$

Del gráfico:

$$\frac{r}{p-a} = \tan\left(\frac{A}{2}\right) \rightarrow r = (p-a)\tan\left(\frac{A}{2}\right)$$

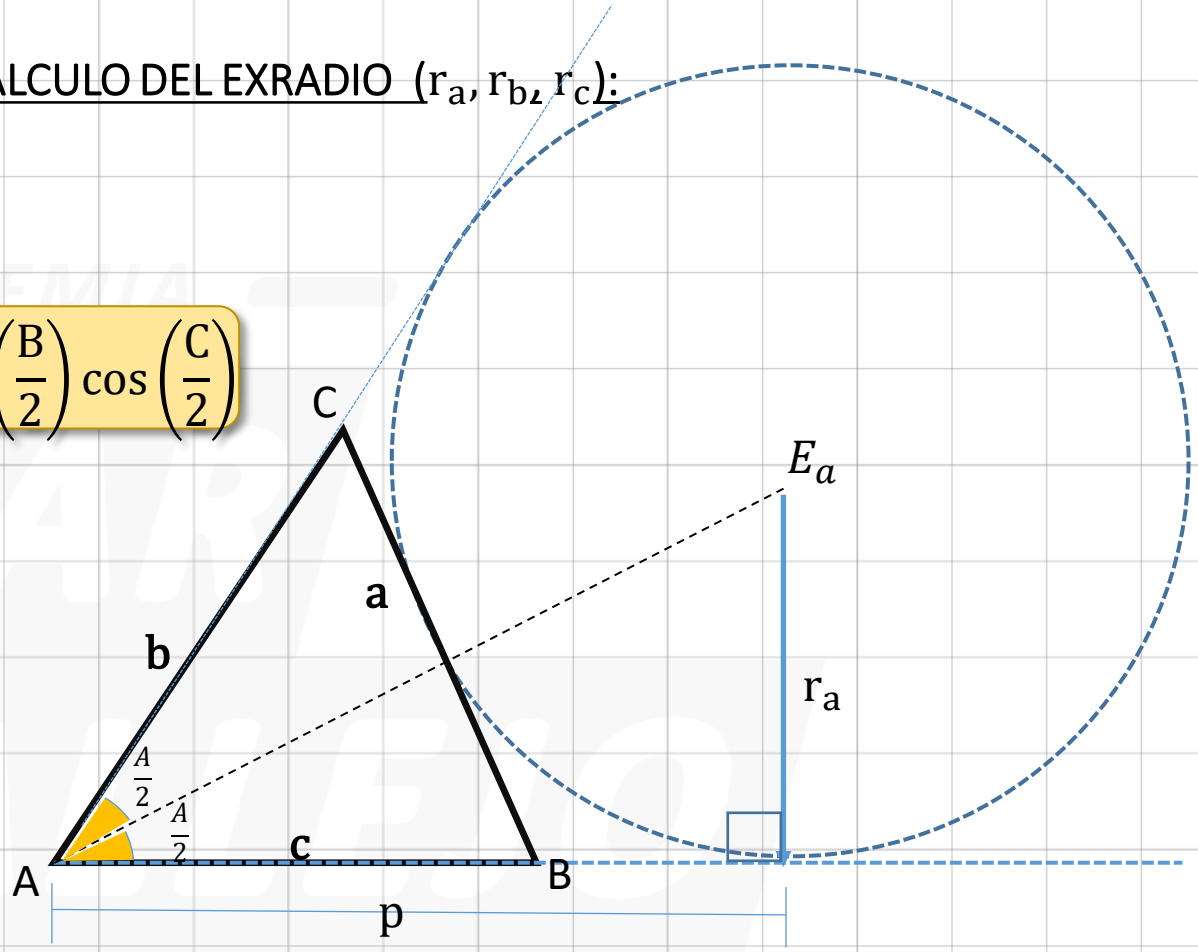
$r = 4R\,Sen\frac{A}{2}\,Sen\frac{B}{2}\,Sen\frac{C}{2}$

Análogamente:

$$r = (p-c)\tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$r = (p-b)\tan\left(\frac{B}{2}\right)$$

CÁLCULO DEL EXRADIO (r_a, r_b, r_c):



Del gráfico: $\frac{r_a}{p} = \tan\left(\frac{A}{2}\right) \rightarrow r_a = p\tan\left(\frac{A}{2}\right)$

Análogamente:

$$r_b = p\tan\left(\frac{B}{2}\right)$$

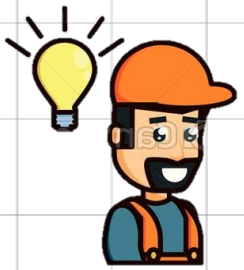
$$r_c = p\tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

PROBLEMA

En un triángulo, las medidas de sus ángulos internos están en progresión geométrica de razón 2. Calcule r/R, siendo r el inradio y R el circunradio del triángulo.

A) $2\sqrt{7}\cot\frac{3\pi}{7}$ B) $\frac{\sqrt{7}}{2}\tan\frac{3\pi}{7}$ C) $2\sqrt{7}\tan\frac{3\pi}{7}$

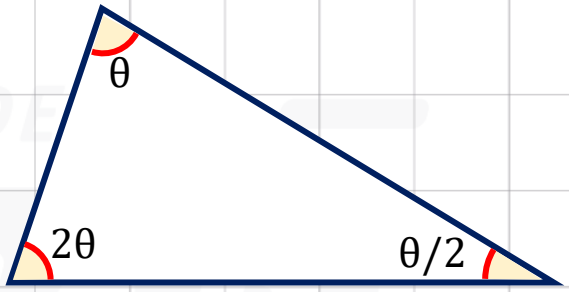
D) $\frac{\sqrt{7}}{2}\cot\frac{3\pi}{7}$ E) $\sqrt{7}\cot\frac{3\pi}{7}$



Tenga en cuenta

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$$

Resolución



Del triángulo

$$\theta+\frac{\theta}{2}+2\theta=\pi$$

$$\theta=\frac{2\pi}{7}$$

Piden: $\frac{r}{R}$ Por teoría : $r=4R\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)$

$$\rightarrow \frac{r}{R}=4\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}=\frac{4\operatorname{sen}\frac{\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}}$$

$$\frac{r}{R}=\frac{4\left(\frac{\sqrt{7}}{8}\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}}{\operatorname{sen}\frac{3\pi}{7}} \quad \text{pero ...} \frac{\pi}{14}+\frac{3\pi}{7}=\frac{\pi}{2}$$

entonces $\operatorname{sen}\frac{\pi}{14}=\cos\frac{3\pi}{7}$

$$\therefore \frac{r}{R}=\frac{\sqrt{7}}{2}\cot\left(\frac{3\pi}{7}\right)$$

ACADEMIA
CÉSAR
VALLEJO

GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe